Алгебра та теорія чисел

Група 221
Викладач Котова О.

Тема: **Групи** (10год.)

Лекція 1.

План.

1. Означення та приклади груп. Порядок групи.
2. Порядок елемента групи. Твірні елементи. Таблиця Келі.
3. Підгрупи. Циклічні підгрупи.
4. Циклічні групи.

Короткий зміст лекції.

Означення 1. Множина X із заданою на ній бінарною асоціативною операцією називається ***підгрупою***.

Означення 2. Півгрупа з одиничним (нейтральним) елементом називається ***моноїдом***.

Означення 3. Моноїд G, всі елементи якого зворотні, називається ***групою***.

Іншими словами, передбачається, що виконуються наступні аксіоми:

А.1 На множині G визначена бінарна операція: $(x, y) \to x*y$.

А.2 Операція асоціативна:

$(xy)z = x(yz)$ для всіх $x, y, z \in G$.

А.3 G має нейтральний (одиничний) елемент e: $xe = ex = x$ для усіх $x \in G$.

А.4 Для кожного елемента $x \in G$ існує обернений x^{-1}: $x^{-1}*x = x*x^{-1} = e$.

Означення 4. ***Групою*** називається півгрупа, в якій виконуються обернені операції, тобто для будь-яких елементів a і b кожне з рівнянь $ax = b$, $ya = b$ має єдиний розв'язок.

Означення 5. Кількість елементів групи називається її ***порядком***: $|G| = n$.

Означення 6. Група з комутативною операцією називається ***комутативною*** (абелевою).

Означення 7. Мінімальне натуральне число n таке, що $x^n=e$, називається ***порядком елемента*** x: $|x| = n$.

Означення 8. Підмножина $H \subset G$ називається підгрупою групи G, якщо

а) $e \in H$;

б) $h_1, h_2 \in H \rightarrow h_1 \cdot h_2 \in H$;

в) $h \in H \rightarrow h^{-1} \in H$.

Підгрупа $H \in G$ – власна, якщо $H \neq e$: $H \neq G$.

Теорема 1. Перетин $\bigcup\limits_{i \in I} H_i$ будь-якої множини $\{H_i / i \in I\}$ підгруп групи G є підгрупою.

Нехай G – група. Якщо M – будь-яка підмножина із G, то існує мінімальна підгрупа, яка містить цю підмножину M, підгрупа, що породжується множиною M; позначається $\{M\}$. А саме це буде перетин підгруп групи G, які містять в собі M; однією з таких підгруп буде сама група G.

Підгрупа $\{M\}$ складається з тих і тільки тих елементів групи G, які хоч би одним способом можуть бути записані в вигляді деякого добутку степенів скінченого числа елементів із M.

Означення 9. Множина M називається ***множиною твірних*** підгрупи $\{M\}$.

Якщо множина M складається із одного елемента a, то підмножина $\{a\}$ групи G, що складається із усіх степенів елемента a є підгрупою групи G.

Означення 10. Підгрупа $\{a\}$ називається ***циклічною підгрупою*** групи G, породженою елементом a.

Означення 11. Група G називається ***циклічною групою***, якщо вона складається із степенів одного із своїх елементів a, тобто співпадає з однією із своїх циклічних підгруп $\{a\}$.

Елемент a називається в цьому випадку ***твірним елементом*** групи G.

Теорема 2. Порядок будь-якого елемента $a \in G$ дорівнює порядку $\{a\}$. Якщо a – елемент скінченого порядку q, то

$$\{a\}=\langle e, a, \ldots, a^{q-1}\rangle \text{ і } a^k=e \leftrightarrow k=eq, e\in Z.$$

Теорема 3. Переставні елементи *a, b* будь-якої групи *G*, що мають взаємно прості порядки *s, t,* породжують в *G* циклічну підгрупу порядку *st*

$$\{a, b\}=\{ab\}.$$

Контрольні питання для самоперевірки.

1. Що називається (бінарною) алгебраїчною операцією?
2. Яка операція називається асоціативною?
3. Доведіть незалежність результату асоціативної операції для будь-яких *n* елементів від початкового розташування дужок.
4. Дайте означення групи і доведіть їх рівносильність.
5. Доведіть єдиність нейтрального елемента в групі.
6. Доведіть єдиність оберненого елемента для будь-якого елемента групи.
7. Наведіть приклади груп:

    а) відносно операції додавання;

    б) відносно операції множення;

    в) нескінчених груп;

    г) скінчених груп;

    д) абелевих груп;

    е) неабелевих груп.
8. Побудуйте таблицю Келі для скінченої групи.
9. Доведіть наступні властивості для мультиплікативних груп:

    а) $(a^{-1})^{-1}=a$;

    б) $(a_1*a_2*\ldots*a_n)^{-1}=a_n^{-1}\cdot\ldots a_2^{-1}\cdot a_1^{-1}$.

Як ці властивості будуть виглядати для адитивних груп?

10. Що називається степенем з цілим додатнім показником? З цілим від'ємним показником? Знульовим показником?
11. Виведіть правила множення степенів.
12. Що називається порядком групи? Елемента? Наведіть приклади.
13. Дайте означення підгрупи. Наведіть приклади груп та їх підгруп.

14. Дайте означення циклічної підгрупи. Наведіть приклади скінчених і нескінчених циклічних груп.
15. Довести, що непуста підмножина H скінченої (мультиплікативної) групи G є підгрупою, якщо H замкнена відносно множення.

Лекція 2.

План.

5. Означення та приклади груп. Порядок групи.
6. Порядок елемента групи. Твірні елементи. Таблиця Келі.
7. Підгрупи. Циклічні підгрупи.
8. Циклічні групи.

Короткий зміст лекції.

Означення 1. Множина X із заданою на ній бінарною асоціативною операцією називається ***підгрупою***.

Означення 2. Півгрупа з одиничним (нейтральним) елементом називається ***моноїдом***.

Означення 3. Моноїд G, всі елементи якого зворотні, називається ***групою***.

Іншими словами, передбачається, що виконуються наступні аксіоми:

А.1 На множині G визначена бінарна операція: $(x, y) \to x*y$.

А.2 Операція асоціативна:

$(xy)z = x(yz)$ для всіх $x, y, z \in G$.

А.3 G має нейтральний (одиничний) елемент e: $xe = ex = x$ для усіх $x \in G$.

А.4 Для кожного елемента $x \in G$ існує обернений x^{-1}: $x^{-1}*x = x*x^{-1} = e$.

Означення 4. Групою називається півгрупа, в якій виконуються обернені операції, тобто для будь-яких елементів a і b кожне з рівнянь $ax = b$, $ya = b$ має єдиний розв’язок.

Означення 5. Кількість елементів групи називається її ***порядком***: $|G| = n$.

Означення 6. Група з комутативною операцією називається ***комутативною*** (абелевою).

Означення 7. Мінімальне натуральне число n таке, що $x^n=e$, називається ***порядком елемента*** x: $|x| = n$.

Означення 8. Підмножина $H \subset G$ називається підгрупою групи G, якщо

а) $e \in H$;

б) $h_1, h_2 \in H \to h_1 \cdot h_2 \in H$;

в) $h \in H \to h^{-1} \in H$.

Підгрупа $H \in G$ – власна, якщо $H \neq e$: $H \neq G$.

Теорема 1. Перетин $\bigcup_{i \in I} H_i$ будь-якої множини $\{H_i / i \in I\}$ підгруп групи G є підгрупою.

Нехай G – група. Якщо M – будь-яка підмножина із G, то існує мінімальна підгрупа, яка містить цю підмножину M, підгрупа, що породжується множиною M; позначається $\{M\}$. А саме це буде перетин підгруп групи G, які містять в собі M; однією з таких підгруп буде сама група G.

Підгрупа $\{M\}$ складається з тих і тільки тих елементів групи G, які хоч би одним способом можуть бути записані в вигляді деякого добутку степенів скінченого числа елементів із M.

Означення 9. Множина M називається ***множиною твірних*** підгрупи $\{M\}$.

Якщо множина M складається із одного елемента a, то підмножина $\{a\}$ групи G, що складається із усіх степенів елемента a є підгрупою групи G.

Означення 10. Підгрупа $\{a\}$ називається ***циклічною підгрупою*** групи G, породженою елементом a.

Означення 11. Група G називається ***циклічною групою***, якщо вона складається із степенів одного із своїх елементів a, тобто співпадає з однією із своїх циклічних підгруп $\{a\}$.

Елемент a називається в цьому випадку ***твірним елементом*** групи G.

Теорема 2. Порядок будь-якого елемента $a \in G$ дорівнює порядку $\{a\}$. Якщо a – елемент скінченого порядку q, то

$$\{a\}=\langle e, a, \ldots, a^{q-1}\rangle \text{ і } a^k=e \leftrightarrow k=eq, e\in Z.$$

Теорема 3. Переставні елементи a, b будь-якої групи G, що мають взаємно прості порядки s, t, породжують в G циклічну підгрупу порядку st

$$\{a, b\}=\{ab\}.$$

Контрольні питання для самоперевірки.

16. Що називається (бінарною) алгебраїчною операцією?
17. Яка операція називається асоціативною?
18. Доведіть незалежність результату асоціативної операції для будь-яких n елементів від початкового розташування дужок.
19. Дайте означення групи і доведіть їх рівносильність.
20. Доведіть єдиність нейтрального елемента в групі.
21. Доведіть єдиність оберненого елемента для будь-якого елемента групи.
22. Наведіть приклади груп:

    а) відносно операції додавання;

    б) відносно операції множення;

    в) нескінчених груп;

    г) скінчених груп;

    д) абелевих груп;

    е) неабелевих груп.
23. Побудуйте таблицю Келі для скінченої групи.
24. Доведіть наступні властивості для мультиплікативних груп:

    а) $(a^{-1})^{-1}=a$;

    б) $(a_1*a_2*\ldots*a_n)^{-1}=a_n^{-1}\cdot\ldots a_2^{-1}\cdot a_1^{-1}$.

Як ці властивості будуть виглядати для адитивних груп?

25. Що називається степенем з цілим додатнім показником? З цілим від'ємним показником? Знульовим показником?
26. Виведіть правила множення степенів.
27. Що називається порядком групи? Елемента? Наведіть приклади.
28. Дайте означення підгрупи. Наведіть приклади груп та їх підгруп.

29. Дайте означення циклічної підгрупи. Наведіть приклади скінчених і нескінчених циклічних груп.
30. Довести, що непуста підмножина H скінченої (мультиплікативної) групи G є підгрупою, якщо H замкнена відносно множення.
31. Довести, що в групі G парного порядку $|G|=2n$ обов'язково існує елемент $g \neq e$ порядку 2.

Література: [1], § 63, 64; [2], гл. IV, § 2; [11], гл. X § 1-3.

32.
33. Довести, що в групі G парного порядку $|G|=2n$ обов'язково існує елемент $g \neq e$ порядку 2.

Література: [1], § 63, 64; [2], гл. IV, § 2; [11], гл. X § 1-3.

Лекція 3.

Тема: **Розклад групи за підгрупою**.

План.

1. Суміжні класи групи за підгрупою.
2. Теореми Лагранжа, Пуанкаре.
3. Нормальні дільники.
4. Фактор-група.

Короткий зміст лекцій.

Нехай M і N – підмножини групи G.

Означення 1. Добутком підмножин $M*N$ називається сукупність елементів групи G, які хоч би одним способом представляються у вигляді добутку деякого елемента із M на деякий елемент із N.

Із асоціативності групової операції випливає асоціативність множення підмножин групи: $(M*N)*P = M*(N*P)$.

Якщо одна із множин складається з одного елемента a, то одержуємо добуток $a*N$ елемента на множину або добуток $M*a$ множини на елемент.

Нехай A будь-яка підгрупа групи G, x – будь-який елемент із G.

Означення 2. Добуток xA називається ***лівим суміжним класом групи*** G за підгрупою A, породженим елементом x, а добуток Ax – ***правим суміжним класом***.

Теорема 1. Будь-який лівий (правий) суміжний клас породжується будь-яким із своїх елементів.

Звідси випливає: два будь-яких лівих (правих) суміжних класи групи G за підгрупою A або співпадають, або не мають жодного спільного елемента.

Отже вся група G розпадається на ліві (праві) суміжні класи за підгрупою A, що не перетинаються.

Означення 3. Цей розклад називається ***лівостороннім (правостороннім) розкладом групи*** G за підгрупою A:

$$G = x_{\alpha_1}A + x_{\alpha_2}A + \ldots + x_{\alpha_s}A, \quad G = Ax_{\alpha_1} + Ax_{\alpha_2} + \ldots + Ax_{\alpha_s}$$

Якщо група G абелева, то лівосторонній і правосторонній розклади співпадають.

Теорема Лагранжа. В будь-якій скінченій групі G порядок будь-якої підгрупи є дільником порядку самої групи.

Наслідки:

1) Порядок будь-якого елементу скінченої групи є дільником порядку самої групи;

2) Будь-яка скінчена група, порядок якої є просте число, є циклічною.

Означення 4. Підгрупа A групи G називається ***нормальним дільником*** цієї групи (або інваріантною підгрупою), якщо лівосторонній розклад групи G за підгрупою A співпадає з правостороннім.

Означення 5. Підгрупа A групи G називається ***нормальним дільником*** цієї групи, якщо для будь-якого елемента x із G $xA=Ax$.

Означення 6. Елементи a і b групи G називаються ***спряженими***, якщо в G існує хоч би один такий елемент x, що $b=x^{-1}ax$.

Означення 7. Підгрупа A групи G тоді і тільки тоді буде нормальним дільником в G, якщо разом з будь-яким своїм елементом a вона містить і усі елементи, спряжені з ним в G.

Теорема 2. Перетин будь-яких нормальних дільників групи G є нормальним дільником цієї групи.

Теорема Пуанкаре. Перетин скінченого числа підгруп скінченого індексу сам має скінчений індекс.

Означення 8. Дві підгрупи A і B називаються ***спряженими***, якщо існує такий елемент $x \in G$, що $B=x^{-1}Ax$.

Означення 9. Підгрупа A – нормальний дільник в групі G, якщо вона співпадає з будь-якою спряженою підгрупою, тобто $A \triangleleft G$, якщо для будь-якого елемента $x \in G$, $x^{-1}Ax = A$.

Нехай $A \triangleleft G$. В цьому випадку добуток будь-яких суміжних класів G за A сам є суміжним класом.

На множині усіх суміжних класів групи G за нормальним дільником A визначимо операцію множення: $xA*yA=xyA$.

Означення 10. Сукупність суміжних класів групи G за нормальним дільником A з визначеною на ній операцією множення класів називається ***фактор-групою*** групи G, позначається G/A.

Будь-яка фактор-група G/A абелевої групи G сама є абелевою.

Будь-яка фактор-група G/A циклічної групи G сама є циклічною.

Порядок будь-якої фактор-групи G/A скінченої групи G є дільником порядку самої групи.

Означення 11. Група, що немає нормальних дільників, відмінних від неї самої та від одиничної підгрупи, називається ***простою***.

Теорема 3. Простими абелевими групами є скінченні циклічні групи простих порядків і тільки вони.

Контрольні питання для самоперевірки.

1. Дайте означення лівого (правого) суміжного класу групи G за підгрупою A.

2. Доведіть, що праві (ліві) суміжні класи групи G за підгрупою A не перетинаються або співпадають.
3. Дайте означення лівостороннього (правостороннього) розкладу групи за підгрупою.
4. Дайте означення нормального дільника групи. Наведіть приклади.
5. Доведіть рівносильність всіх означень нормального дільника.
6. Доведіть, що будь-яка підгрупа індексу 2 є нормальним дільником групи.
7. Доведіть, що перетин будь-якої множини нормальних дільників групи G є нормальним дільником в G.
8. Доведіть, що підгрупа, породжена будь-якою системою нормальних дільників групи G, сама є нормальним дільником в G.
9. Довести, що підгрупа A_n парних підстановок є нормальним дільником в симетричній групі підстановок S_n.
10. Доведіть, що перетин нормального дільника і підгрупи є нормальним дільником в цій підгрупі.
11. Нехай G – група, E – її одинична підгрупа. Що являють собою фактор групи G/G, G/E?
12. Нехай H – нормальний дільник групи G, нехай G дорівнює n ($|G| = n$), порядок $H=m$ ($|H| = m$). Довести, що порядок G/H дорівнює n/m ($|G/H| = n/m$).
13. Довести, що в комутативній групі кожна підгрупа є нормальним дільником.

Література: [1] § 64, 65; [2] гл. IV, § 3(4) § 4(4) [11], гл. X, § 5, 6, 7.

Лекція 4.

Тема: ***Відношення спряженості в групах.***

План.

1. Класи спряжених елементів.

2. Нормалізатор, централізатор елемента групи.
3. Нормалізатор, централізатор підгрупи групи.
4. Центр групи.
5. Комутатори і комутант групи.

Короткий зміст лекції.

Означення 1. Множина K елементів із G така, що кожні два елементи із K спряжені між собою і жоден елемент із K не є спряженим із жодним з елементів, що не належать K, називається ***класом спряжених елементів*** групи G.

Відношення спряженості елементів в групі є відношенням еквівалентності. Відношення спряженості визначає розбиття групи G на класи спряжених елементів, що не перетинаються.

Одиниця завжди утворює окремий клас так як $x^{-1}ex=e$ для будь-якого $x\in G$.

Кожний елемент, переставний з усіма іншими елементами групи, утворює окремий клас.

В комутативній групі число класів спряжених елементів дорівнює порядку групи. В некомутативній групі число класів менше порядку групи.

Порядки спряжених між собою елементів однакові.

Теорема 1. Число елементів в кожному класі спряжених між собою елементів скінченої групи є дільником порядку групи.

Теорема 2. Для того, щоб підгрупа H групи G була інваріантною підгрупою, необхідно і достатньо, щоб вона містила з кожним своїм елементом h і увесь клас спряжених з ним елементів.

Означення 2. Нехай G скінчена група і $a\in G$. Множина всіх елементів групи, переставних з елементом a, називається ***нормалізатором (централізатором) елемента*** a, позначається $N_G(a)=C_G(a)$, тобто $N_G(a)=C_G(a)<x\in G\ /xa = ax>$.

Означення 3. Централізатором підгрупи H групи G (позначається $C_G(H)(Z_G(H))$) називається множина елементів x групи G таких, що для будь-якого елемента $a\in H$, $xa=ax$, тобто $C_G(H)=<x\in G/\forall a\in H, xa=ax>$.

Нормалізатор (централізатор) елемента a групи G, централізатор підгрупи H групи G є підгрупами групи G.

Означення 4. Нормалізатором підгрупи H групи G (позначається $N_G(H)$) називається множина елементів x групи G таких, що $x^{-1}Hx=H$, тобто $N_G(H)=<x\in G/x^{-1}Hx=H,$ т.о. $x\text{н}=Hx>$.

Нормалізатор підгрупи H групи G є нормальним дільником групи G.

Означення 5. Кожній парі елементів x і y групи G можна співставити елемент $x^{-1}y^{-1}xy$. Такий елемент називається ***комутатором*** елементів x і y і позначається $[x, y]= x^{-1}y^{-1}xy$.

Означення 6. Підгрупа групи G, породжена всіма її комутаторами, називається ***комутантом групи***. Рівність $[x, y]=e$ означає, що елементи x і y переставні.

Теорема 3. Комутант групи є завжди її нормальним дільником.

Теорема 4. Фактор-група групи за її комутантом завжди абелева.

Означення 7. Центром групи G (позначається $Z(G)$) називається множина елементів групи G, переставних з будь-яким елементом цієї групи, тобто $Z(G)= <x\in G/\ \forall g\in G, xg=gx,$ *т.е.* $x^{-1}gx=g,>$.

Контрольні питання для самоперевірки.

1. Дайте означення спряжених елементів групи.
2. Дайте означення класу спряжених елементів.
3. Доведіть, що відношення спряження елементів в групі є відношенням еквівалентності.
4. Доведіть, що спряжені елементи мають однакові порядки.
5. Елементи симетричної групи S_3 розподіліть по класах спряжених елементів.
6. Елементи групи кватерніонів розподіліть по класах спряжених елементів.

7. Знайти усі скінчені групи, які мають тільки два класи спряжених елементів.
8. Для будь-яких елементів групи x і y перевірити рівність $xy=yx*[x, y]$.
9. Які комутатори абелевої групи?
10. Нехай в групі усі комутатори дорівнюють e. Показати, що група абелева.
11. Довести, що $[x, y]^{-1}=[y, x]$.
12. Довести, що комутант є нормальним дільником групи.
13. Довести, що фактор-група групи за її комутантом абелева.
14. Які елементи в групі кватерніонів є комутаторами?
15. Доведіть, що елементи центру групи і тільки вони, мають ту властивість, що клас елементів, що спряжені с даним елементом складається з самого елемента.

Література: [1], §65,[10] гл. 1, 1.2; [11] гл. x, § 9.

Лекція 5.

Тема: ***Гомоморфізми груп.***

План.

1. Означення гомоморфізму, ізоморфізму.
2. Ядро гомоморфізму.
3. Автоморфізми.
4. Групи автоморфізмів.
5. Теорема про гомоморфізми груп.

Короткий зміст лекції.

Означення 1. Відображення $f\colon G\to G'$ групи $(G, \bullet)$ в $(G', \circ)$ називається гомоморфізмом, якщо $f(a\bullet b)=f(a)\bullet f(b),\ \forall\ a, b\in G$.

Означення 2. Дві групи G і G' з операціями $\bullet$ і $\circ$ називаються ізоморфними, якщо існує відображення $f\colon G\to G'$ таке, що

1. $f(a*b)=f(a)\circ f(b)$, для усіх $a, b\in G$.
2. f –взаємо однозначні.

Факт ізоморфізму груп позначається $G \cong G'$.

Простіші властивості ізоморфізму:

1. Одиниця переходить в одиницю.
2. $f(a^{-1})=f(a)^{-1}$.
3. Обернене відображення f^{-1}: $G \to G'$ (яке існує за означенням) також є ізоморфізмом.

Теорема 1. Усі циклічні групи одного і того ж порядку (в тому числі і нескінченні) ізоморфні.

Теорема 2. (Келі). Будь-яка скінчена група порядку n ізоморфна деякій підгрупі симетричної групи S_n.

Якщо в означенні ізоморфізму покласти $G=G'$, ми одержимо ізоморфне відображення ϕ: $G\to G$ групи G на себе. Воно називається ***автоморфізмом групи*** G (позначається Aut(G)).

Множина всіх Aut(G) автоморфізмів групи G утворює групу – підгрупу групи усіх взаємно-однозначних відображень $G\to G$.

В групі автоморфізмів Aut(G) групи G є одна особлива підгрупа (Int(G)) – група внутрішніх автоморфізмів. Її елементами є відображення $t_x(a)= xax^{-1}$ ($a \in G$). Для кожного $x \in G$ t_x є автоморфізмом групи G.

Означення 3. Ядром гомоморфізму f називається множина Ker$f$=<$g \in G$/ $f(g) = e'$>.

Ядро гомоморфізму – підгрупа в G.

Теорема 3. Ядро гомоморфізму завжди є нормальним дільником групи.

Теорема про гомоморфізми. Нехай f – гомоморфізм групи G в групу H, M=Ker f – інваріантна підгрупа, що є ядром f, ϕ - природний гомоморфізм групи G в групу G/Ker f такий, що ϕ (x)=Mx, тоді існує ізоморфізм:

$$\psi : G/\mathrm{Ker}\, f \to H, \text{ такий, що } \psi(Mx) = f(x).$$

Замкнені діаграми цих відображень відповідно для групи елементів мають вигляд:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f(x)"] \arrow[dr, "\varphi(\simeq)"'] & & H \arrow[dl, leftrightarrow, "\psi(\cong)"] \\ & G/Kerf & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[rr, "f(x)"] \arrow[dr, "\varphi(\simeq)"'] & & f(x) \arrow[dl, leftrightarrow, "\psi(\cong)"] \\ & Mx & \end{tikzcd}$$

Групи, яким гомоморфна задана група G, це, з точністю до ізоморфізму, – усі її фактор-групи і тільки вони. У випадку скінченої групи G – порядок кожної такої групи є дільником порядку групи.

Група внутрішніх автоморфізмів Int G групи G ізоморфна фактор-групі $G/Z(G)$.

Контрольні питання для самоперевірки.

1. Дайте означення гомоморфізму, ізоморфізму груп.
2. Доведіть, що при ізоморфізмі одиниця групи G переходить в одиницю групи G'.
3. Доведіть, що при ізоморфізмі $f(a^{-1})=f(a)^{-1}$.
4. Доведіть, якщо група G гомоморфно відображається на групу G', причому елемент a із G відображається на $a' \in G'$, то

   а) порядок a ділиться на порядок a';

   б) порядок G ділиться на порядок G'.
5. Доведіть, що будь-яка скінчена група порядку n ізоморфна деякій групі підстановок із n елементів.
6. Знайдіть групу автоморфізмів циклічної групи $\{a\}$ порядку: а) 5, б) 6.
7. Доведіть, що с точністю до ізоморфізму S_3 – єдина не абелева група порядку 6.
8. Наведіть приклади ізоморфних груп.
9. Наведіть приклади груп геометричних перетворень.

Література: [1] § 65; [11] гл. X, §4, 11.